НИЯУ МИФИ

КАФЕДРА РАДИАЦИОННОЙ ФИЗИКИ И БЕЗОПАСНОСТИ АТОМНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

КУРС «НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ»

НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ РИСКА

Костерев В.В.

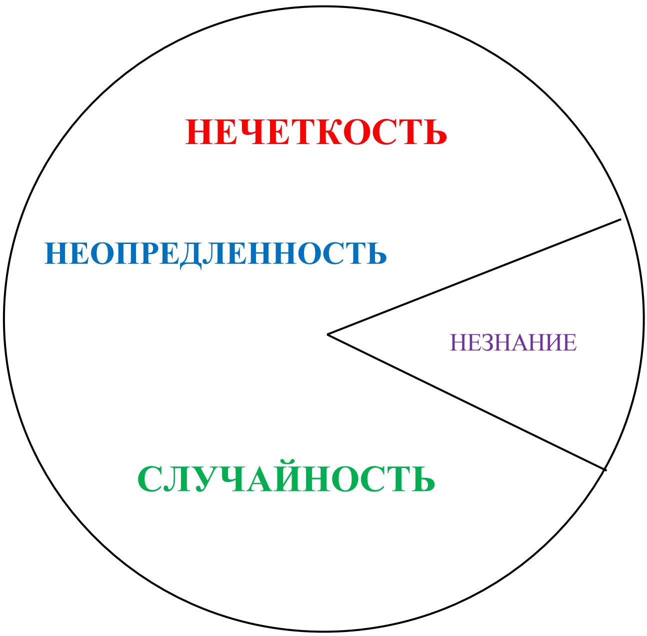
2013

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ РИСКА

Согласно принципу несовместимости, сформулированному основоположником теории нечетких множеств Л. Заде, сложность системы и точность, с которой ее можно проанализировать традиционными методами, находятся в состоянии взаимного противоречия. Другими словами, по мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные, содержащие смысл утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за которым точность и смысл становятся взаимоисключающими.

ВИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

При решении большинства проблем приходится сталкиваться с различной информацией. Условно ее можно отнести к одному из следующих типов: определенная (надежная), неопределенная и полное незнание. В свою очередь, неопределенная информация может быть случайной и нечеткой.



Виды неопределенности в информационном мире

Нечеткие модели

При обработке параметров нечеткой природы в задачах оценки риска целесообразно использовать нечеткие модели.

Для использования нечетких моделей необходимо определить основные операции над нечеткими переменными, обобщить аппарат формального описания риска на случай информации не статистической, а нечеткой природы, разработать соответствующие алгоритмы и программные продукты.

Понятие нечёткого множества

Математическая теория нечетких множеств, предложенная Л. Заде более четверти века назад, позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. С выходом в 1965 г. статьи Л. Заде "Нечеткие множества" начинается исключительно бурное развитие новой теории, предназначенной для изучения и анализа систем, в которых основная роль принадлежит суждениям и решениям человека. Поскольку эти системы связаны с принципиально нечетким (размытым, расплывчатым) характером информации, то сама новая теория получившая название "теории нечетких множеств" и есть обобщение обычной (четкой) теории множеств.

Исходным понятием обычной теории множеств является понятие принадлежности элемента x некоторого множества X к определенному подмножеству $A \subset X$: ($x \in A$). Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие - характеристическую функцию $\chi_A(x)$, значение которой указывает, является ли x элементом A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

Однако этого понятия оказалось недостаточно для рассмотрения ситуаций, которые описываются с помощью нечетко определенных понятий типа "множество высоких людей", "множество чисел много больше 10", и т. д. В основе теории нечетких множеств лежит представление о том, что составляющие множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывание типа "элемент принадлежит данному множеству A" теряет смысл, поскольку необходимо указать, с какой степенью элемент принадлежит данному множеству. Это множество степеней принадлежности может оцениваться на бесконечной шкале действительных (или рациональных) чисел от 0 до 1, или на части чисел интервала [0,1], в том числе и на конечной шкале. Например, объект, определяемый выражением $A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0), (x_3|0{,}3), (x_4|1), (x_5|0{,}8)\}$ будем называть нечетким подмножеством множества X, где x_i – элемент универсального множества X, а число после вертикальной черты задает значение функции принадлежности на этом элементе. Следовательно, рассмотренное нечеткое подмножество A содержит в небольшой степени x_1, не содержит x_2, содержит x_3 в немного большей степени, чем x_2, полностью содержит x_4, и в значительной степени содержит x_5. Таким образом, подход к формализации нечёткости состоит в следующем. Нечёткое множество образуется путём введения обобщённого понятия принадлежности – расширения двухэлементного множества значений характеристической функции $\{0{,}1\}$ до континуума $[0{,}1]$. Это означает, что переход от полной принадлежности к полной его непринадлежности происходит не скачком, а плавно, причём принадлежность элемента множеству выражается числом из $[0{,}1]$.

Нечёткое множество $A=\{(x,\ \mu_A(x)),\ X\}$ определяется математически как совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов х универсального множества X и соответствующих степеней принадлежности $\mu_{A(x)}$ или непосредственно в виде <u>*функции принадлежности*</u> $\mu_{A(x)}$: $X \to [0,1]$.

Отметим, что в зарубежной литературе нечеткое множество $\underline{B}$ для случая дискретного, конечного пространства определений X часто обозначают как (обозначения Заде)

$$\underline{B} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_{\underline{B}}(x_i)}{x_i} \right\} = \frac{\mu_{\underline{B}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\underline{B}}(x_2)}{x_2} + \ldots,$$

где в числителе расположена функция принадлежности элемента, стоящего в знаменателе. В случае непрерывного и бесконечного пространства X в обозначениях нечеткого множества вместо знака суммы используют знак интеграла.

Основные операции над нечёткими множествами

Важнейшим вопросом использования нечетких множеств в моделях оценки и управления риском, а также их использования в системах поддержки принятия решений является построение соответствующих операторов агрегирования информации и анализ их семантики. При использовании нечетких множеств имеется возможность применять различные операторы агрегирования информации в зависимости от ситуации.

Дополнение:

$$\mu_2(x) = 1-\mu_1(x)\ ,\ \forall\ x\in X.$$

Пересечение. Тип I – минимум:

$$\mu_3(x) = (\mu_1\wedge\mu_2)(x) = \min\{\mu_1(x),\mu_2(x)\}$$

$$\forall x\in X.\quad)$$

Объединение. Тип I – максимум:

$$\mu_3(x) = (\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}\quad \forall x \in X.$$

Пересечение. Тип II – ограниченное произведение:

$$\mu_3(x) = (\mu_1 \wedge \mu_2)(x) = \max\{0, \mu_1(x) + \mu_2(x) - 1\}\quad \forall x \in X$$

Объединение. Тип II– ограниченная сумма:

$$\mu_3(x) = (\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \min\{1, \mu_1(x) + \mu_2(x)\}\quad \forall x \in X.$$

Пересечение. Тип III – алгебраическое произведение:

$$\mu_3(x) = (\mu_1 \cdot \mu_2)(x) = \mu_1(x) \cdot \mu_2(x)\quad \forall x \in X.$$

Объединение. Тип III – алгебраическая сумма:

$$\mu_3(x) = (\mu_1+\mu_2)(x) = \mu_1(x)+\mu_2(x) - \mu_1(x)\cdot\mu_2(x) \quad \forall x\in X.$$

Разность:

$$\mu_3(x) = \mu_1(x) - \mu_2(x) = \max\{0,\mu_1(x) - \mu_2(x)\} \quad \forall x\in X.$$

Концентрация:

$$\mu_3(x) = \mu^2(x) \quad \forall x\in X.$$

Жесткие, однозначные операторы неполно отражают смысл гибких, многозначных преобразований нечетких переменных, в том числе, лингвистических переменных. Поэтому практический интерес представляет построение обобщенных нечетких операторов – операторов дополнения, объединения и пересечения, которые позволяют учесть гибкость, степень компенсации операндов, специфику конкретного лица (эксперта), осуществляющего оценку риска или принимающего решения в нечеткой среде. В основе определения подобных обобщенных операторов может лежать обобщенный подход, заключающийся в их определении в классе треугольных норм и конорм.

Базовые сведения о триангулярных нормах

триангулярные (треугольных) *нормы* (Т-нормы) и *конормы* (Т-конормы, *S*-нормы) - наиболее общий класс функций f: $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$, удовлетворяющих требованиям к операторам конъюнкции и дизъюнкции.

Определение 1. *Триангулярной нормой* (для краткости Т-*нормой*) называется двоичная операция на единичном интервале [0,1], т.е. функция Т: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$

такая, что для всех $x,y,z \in [0,1]$ выполняются четыре аксиомы:

(Т1) – *коммуникативность*	**$T(x,y) = T(y,x)$,**
(Т2) – *ассоциативность*	**$T(y,z)) = T(T(x,y),z)$,**
(Т3) – *монотонность*	**$T(x,y) \leq T(x,z)$ для любого $y \leq z$,**
(Т4) – *граничные условия*	**$T(x,1) = x$, $T(0,x) = T(x,0) = 0$, $T(1,x) = x$.**

Основные Т-нормы и Т-конормы:

а. *Минимум* T_M и *Максимум* S_M (логика Заде):

$$T_M(x,y) = \min(x,y),$$

$$S_M(x,y) = \max(x,y).$$

б. *Произведение* T_P и *Вероятностная сумма* S_P:

$$\mathbf{T}_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y},$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Принцип расширения

Принцип расширения (обобщения) как одна из основных идей теории нечётких множеств носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения φ на класс нечётких множеств, а также обобщить определения операций над нечёткими множествами типа 1, на нечёткие множества типа 2 (когда сами значения функции принадлежности задаются неоднозначно) и выше.

Пусть $\varphi: X \to Y$ — заданное отображение, а A — нечёткое множество в X. Тогда образ нечётких множеств A при отображении φ есть нечёткое множество B в Y с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \max_{x \in \varphi^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in Y,$$

где $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \mid \varphi(x) = y\}$. В случае нечёткого отображения $\varphi: X \to Y$ имеем:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X} \{\min [\mu_A(x), \mu_\varphi(x,y)]\},$$

Следовательно, принадлежность элемента z на Z получается из принадлежностей элементов x на X и y на Y в соответствии с

$$\mu_K(z) = \max_{z = x*y} \{\min [\mu_I(x), \mu_J(x)]\}.$$

В соответствии с принципом, принадлежность $\mu_3(z)$ элементов z получается из принадлежностей $\mu_1(x)$ и $\mu_2(y)$ элементов x и y:

$$\mu_3(z) = \max_{x*y=z}\{\min [\mu_1(x), \mu_2(y)]\}.$$

Если $z = x + y$ или $z = x \times y$, тогда функция принадлежности z равна соответственно

$$\mu_3(z) = \max_{z=x+y} \{\min [\, \mu_1(x)\,,\, \mu_2(z - x)\,]\},$$

и

$$\mu_3(z) = \max_{z=x\times y} \{\min [\, \mu_1(x)\,,\, \mu_2(z / x)\,]\}.$$

Принцип расширения дает общее решение для операций в нечеткой алгебре. На практике осуществление решения является затруднительным для реальных ситуаций даже с использованием компьютера. Это связано, прежде всего, с тем, что при дискретизации переменных в вычислениях информация может теряться, из-за чего результаты получаются неправильными. Среди альтернативных методов, наибольшее распространение получили метод вершин, DSW-метод и ограниченный DSW-метод.

Формальное описание риска в нечетких моделях

Термин “риск” имеет различные толкования в литературе, и в него зачастую вкладывают различное содержание. Общим, пожалуй, является представление о риске, как о величине, отражающей неуверенность эксперта в том, произойдет ли данное событие (нежелательное), и возникнет ли данное неблагоприятное состояние. Иначе можно определить риск как действие в условиях неопределенности. Неопределенность (недостаток) информации роднит риск с ситуацией принятия решений в условиях недетерминированных параметров. Учитывая необходимость в количественных оценках риска, разумно определить риск на основе сочетаний величины события (последствия события) и меры возможности его наступления. На практике для получения точечной оценки значения риска используют произведение их численных значений. При этом, в качестве меры возможности наступления события, как правило, выбирают вероятность его наступления P. Последствия нежелательного события A могут оцениваться различными специфическими параметрами – от экономических до этических или политических. Отсюда риск

$$\boldsymbol{R = A \cdot P}.$$

Переход к нечетким моделям предполагает наличие широкого спектра вариантов агрегирования величины события и меры возможности его наступления. Возможными вариантами обобщения для подобной модели являются:

1. Использование Т-норм для оценки степени уверенности в истинности формулы.
2. Замена значений A и P в на нечеткие числа (лингвистические переменные), а произведения – на расширен-

ное (по принципу обобщения) произведение нечетких чисел.
3. Замена значений А и P на нечеткие отношения, а произведения в – на композицию этих отношений.
4. Обобщение формулы с использованием нечетких интегралов.

Рассмотрим схематично эти варианты.

1. *Использование Т-норм для оценки степени уверенности в истинности формулы.*

Формула для риска может иметь нестрогий характер в связи с тем, что значения вероятности P и ущерба A могут быть известны не точно, а с некоторыми степенями уверенности $x(P)$ и $y(A)$. Наша степень уверенности $z(R)$ в истинности формулы может зависеть от степеней уверенности $x(P)$ и $y(A)$ следующим образом:

- как их минимум – Т-норма Заде:

$$\mathbf{z(\mathit{R}) = T_{\mathit{M}}\,(x(\mathit{P}), y(\mathit{A})) = min\,[x(\mathit{P}), y(\mathit{A})];}$$

- как их произведение – вероятностная Т-норма:

$$\mathbf{z(\mathit{R}) = T_{\mathit{P}}\,(x(\mathit{P}), y(\mathit{A})) = x(\mathit{P}) \times y(\mathit{A});}$$

- как их ограниченная сумма – Т-норма Лукасевича:

$$\mathbf{z(\mathit{R})=T_{\mathit{L}}(x(\mathit{P}),y(\mathit{A})) = max\,(0, x(\mathit{P})+y(\mathit{A})–1)}$$

Возможно использование и других известных Т-норм.

2. *Замена значений А и Р на нечеткие числа (лингвистические переменные), а произведения – на расширенное по принципу обобщения произведение нечетких чисел.*

Формула перепишется в этом случае следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{R}}=\underline{\boldsymbol{A}}\otimes\underline{\boldsymbol{P}}\Leftrightarrow\mu_{\underline{R}}(z)=\max_{z=x\times y}\{\min[(\mu_{\underline{A}}(x),\ \mu_{\underline{P}}(y)]\}.$$

Здесь R, A и P – нечеткие числа; $\mu_R(z)$, $\mu_A(x)$ и $\mu_P(y)$ – функции принадлежности, характеризующие степени принадлежности элементов z, x и y к нечетким множествам R, A и P соответственно; $\otimes$ – операция расширенного произведения нечетких чисел; $\wedge$ – операция min (дизъюнкция) ; $\vee$ – операция max (конъюнкция). Необходимо отметить, что известны и другие принципы расширения. Их рассмотрение обычно увязывают с проблемой "взаимодействия" и "компенсации" переменных.

3. *Замена значений R, A и P на нечеткие отношения, а произведения на композицию этих отношений.*

Нечетким отношением называется нечеткое множество R на декартовом произведении A×B базовых множеств:

$$\mu_{\underline{R}}(x,y) = \mu_{\underline{A}\times\underline{B}}(x,y) = \min\,[\mu_{\underline{A}}(x),\ \mu_{\underline{B}}(y)].$$

Формула перепишется с использованием операции композиции следующим образом:

$$\underline{R}(x,y) = \underline{A}(x,y) \circ \underline{P}(x,y).$$

Здесь $R(x,y)$, $A(x,y)$ и $P(x,y)$ – некоторые нечеткие отношения, а ∘ – операция композиции. Среди известных операций композиции наиболее часто используются операции max-min и max-product, т.е.

$$\mu_{\underline{R}}(x,y) = \max\{\min[\mu_{\underline{A}}(x,y),\ \mu_{\underline{P}}(x,y)]\},$$

и

$$\mu_{\underline{R}}(x,y) = \max\{[\mu_{\underline{A}}(x,y)\cdot\mu_{\underline{P}}(x,y)]\}$$

соответственно.

Можно предложить также max-T композицию нечетких отношений, где T – параметрическая T-норма.

Отношения $R(x,x)$, $A(x,y)$ и $P(y,x)$ могут быть интерпретированы как отношения моделирования, т.е. $X = (x_1, \ldots, x_N)$ – некоторый универсум, возможно, нормированный, $X_{\text{norm}} = [0,1]$, $x_1, \ldots, x_N \in [0,1]$, $У = (y_1, \ldots, y_K)$ – названия (номера) элементов терм-множества лингвистических переменных, выражающих нечеткие значения величин R, A и P. Нормировка X (преобразование в универсальную шкалу) осуществляется специальным монотонным преобразованием F: $X \to [0,1]$, в простейшем случае $F(x) = x / |X|$.

4. *Обобщение формулы с использованием нечетких интегралов.*

Расширение формулы с помощью параметрических T-норм приводит к нечеткой интерпретации формулы через свертку T-нормы от распределения возможностей последствия нежелательного события A – μ_A и вероятностной меры P:

$$R(x) = \int T(\mu_A(x), P(x))dx.$$

Возможно также использование в качестве нечеткой интерпретации формулы интегралов Сугено и Шоке.

Пусть $X = (x_1, \ldots ,x_N)$. Пусть P – нечеткая мера на X. Тогда риск можно определить, как интеграл Сугено от функции A: $X \to [0,1]$ по отношению к мере P

$$R(x) = (S)\int A \circ P = \bigcup_{i=1}^{N} (A(x_{(i)}) \wedge P(A_{(i)})).$$

Здесь (i) обозначает, что индексы упорядочены таким образом, что $0 \le A(x_{(1)}) \le \ldots \le A(x_{(N)}) \le 1$ и $A_{(i)} = \{x_{(i)}, \ldots, x_{(N)}\}$.

Риск можно также определить как интеграл Шоке от функции A: $X \to R$ по отношению к мере P

$$R(x) = (C)\int AdP = \sum (A(x_{(i)}) - A(x_{(i-1)}))P(A_{(i)}),$$

с теми же обозначениями, что и выше, и $A(x_{(0)}) = 0$.

Функция принадлежности риска $\mu_{\underline{R}}$ полностью характеризует риск как нечеткую величину. Из нее можно получить дефаззифицированное значение риска, например, наиболее возможное его значение, а также разброс значений риска.